

神经网络 Neural Networks

第十二章

神经场理论

史忠植

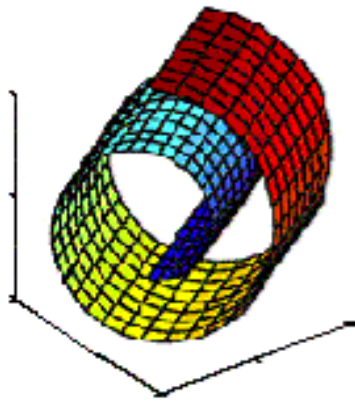
中国科学院计算技术研究所
<http://www.intsci.ac.cn/>

内容提要

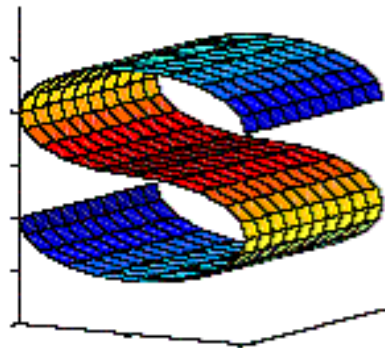
- 12.1 概述
- 12.2 信息几何
- 12.3 统计流形上的Riemann度量
- 12.4 神经场理论模型
- 12.5 基于Fisher分的朴素贝叶斯分类器
- 12.6 动态神经场模型

流形学习框架

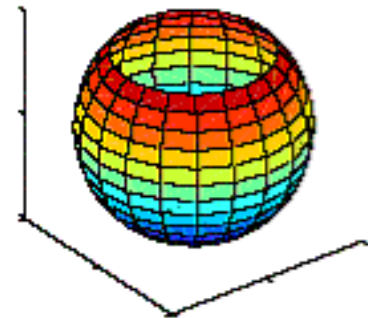
- 什么是流形？
 - 流形是线性子空间的一种非线性推广
 - 拓扑学角度：局部区域线性，与低维欧式空间拓扑同胚
 - 微分几何角度：有重叠chart的光滑过渡
 - 黎曼流形就是以光滑的方式在每一点的切空间上指定了欧氏内积的微分流形



Swiss-roll



S-curve



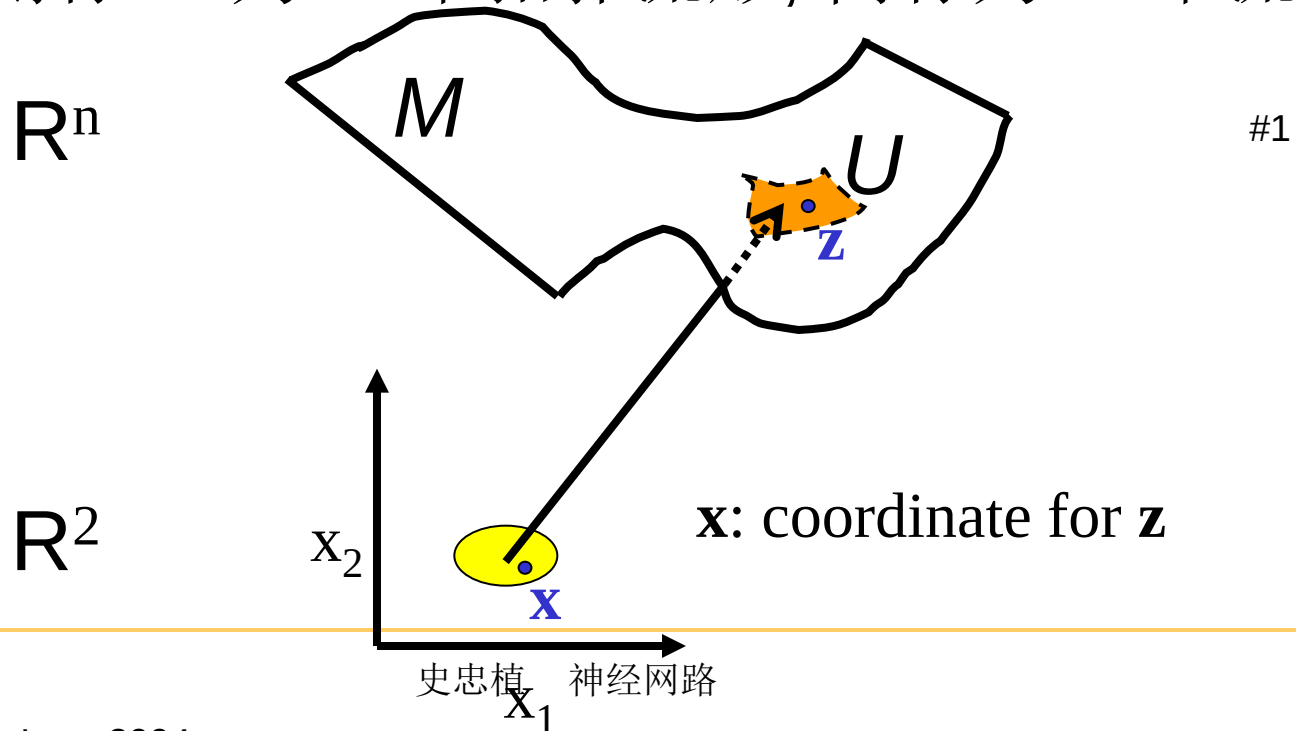
Fishbow

#1

流形学习框架

- 流形的数学定义

- 设 M 是一个Hausdorff拓扑空间, 若对每一点 $p \in M$ 都有 p 的一个开邻域 U 和 $\mathbb{R}^d$ 的一个开子集同胚, 则称 M 为 d 维拓扑流形, 简称为 d 维流形.



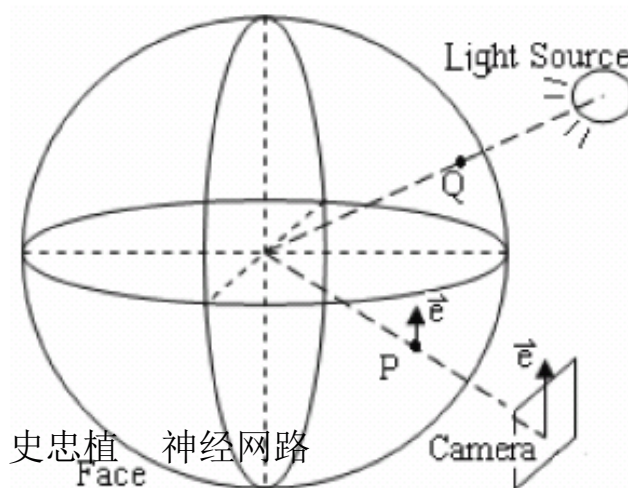
流形学习框架

- 一些基本数学概念
 - 拓扑, Hausdorff 空间, 坐标卡, 微分结构
 - 光滑函数, 光滑映射, 切向量, 切空间
 - ...
- 参考文献
 - 陈省身, 陈维桓, 微分几何讲义. 北京大学出版社, 1983
 - M Berger, B Gostiaux. Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces, GTM115. Springer-Verlag, 1974
 - 陈维桓, 微分流形初步(第二版). 高等教育出版社, 2001

流形学习框架

- 流形学习的目的

- 流形学习是一种非线性的维数约简方法
- 高维观察数据的变化模式本质是由少数几个隐含变量所决定的
 - 如：人脸采样由光线亮度、人与相机的距离、人的头部姿势、人的面部表情等因素决定
- 从认知心理学的程是基于认知流



人的认知过

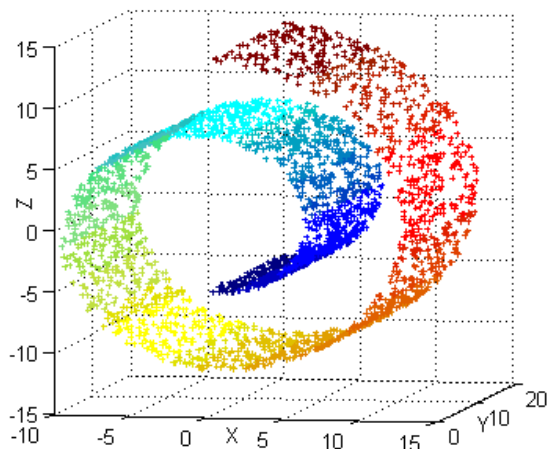
#1

流形学习的数学定义

设 $Y \subset R^d$ 是一个低维流形, $f: Y \rightarrow R^D$ 是一个光滑嵌入, 其中 $D > d$. 数据集 $\{y_i\}$ 是随机生成的, 且经过 f 映射为观察空间的数据 $\{x_i = f(y_i)\}$. 流形学习就是在给定观察样本集 $\{x_i\}$ 的条件下重构 f 和 $\{y_i\}$.

V. de Silva and J. B. Tenenbaum. Global versus local methods in nonlinear dimensionality reduction . *Neural Information Processing Systems 15 (NIPS'2002)*, pp. 705-712, 2003.

流形学习示例



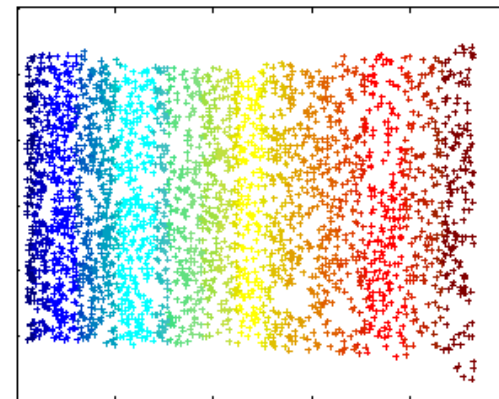
高维数据空间

data / observation
space

非线性降维



保持一定几何拓扑
关系，如测地距离/
邻域线性重构关系



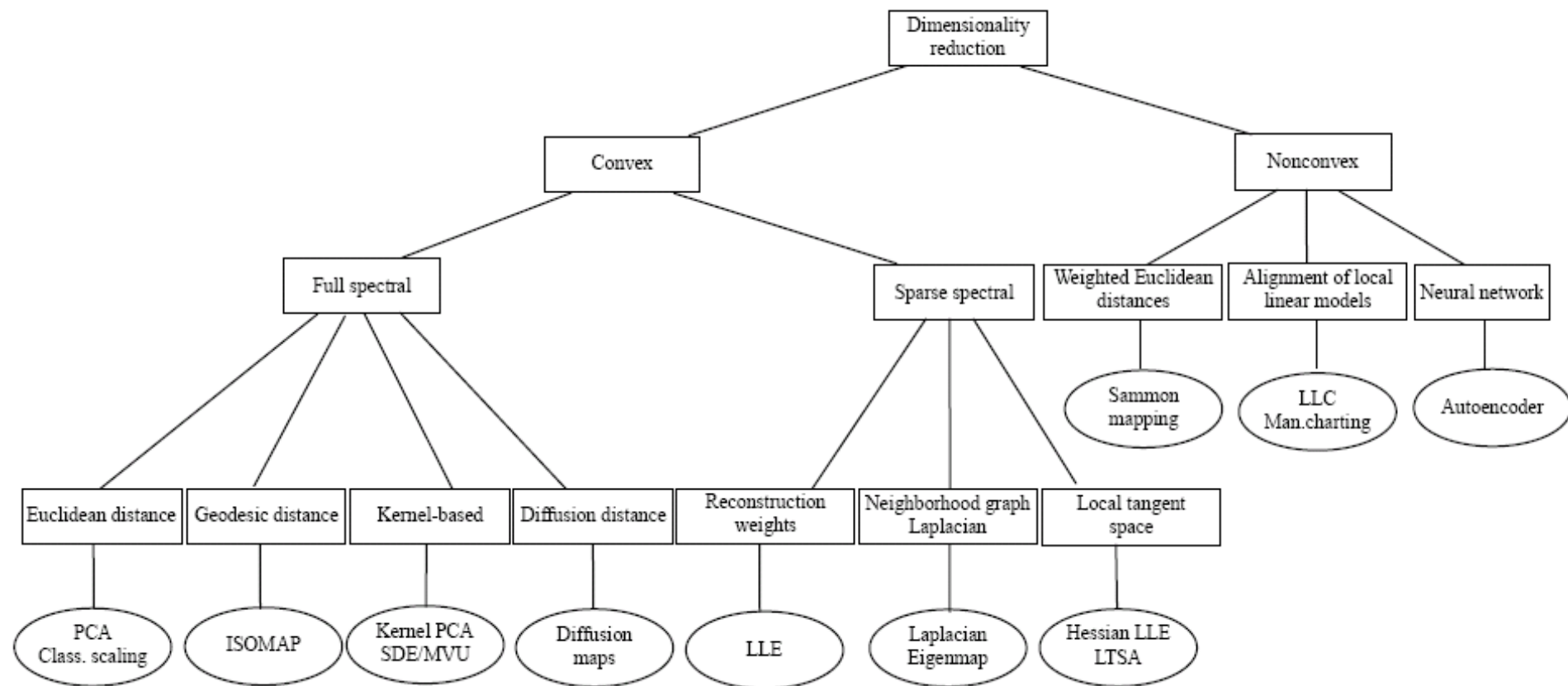
低维嵌入空间
embedding /

coordinate space

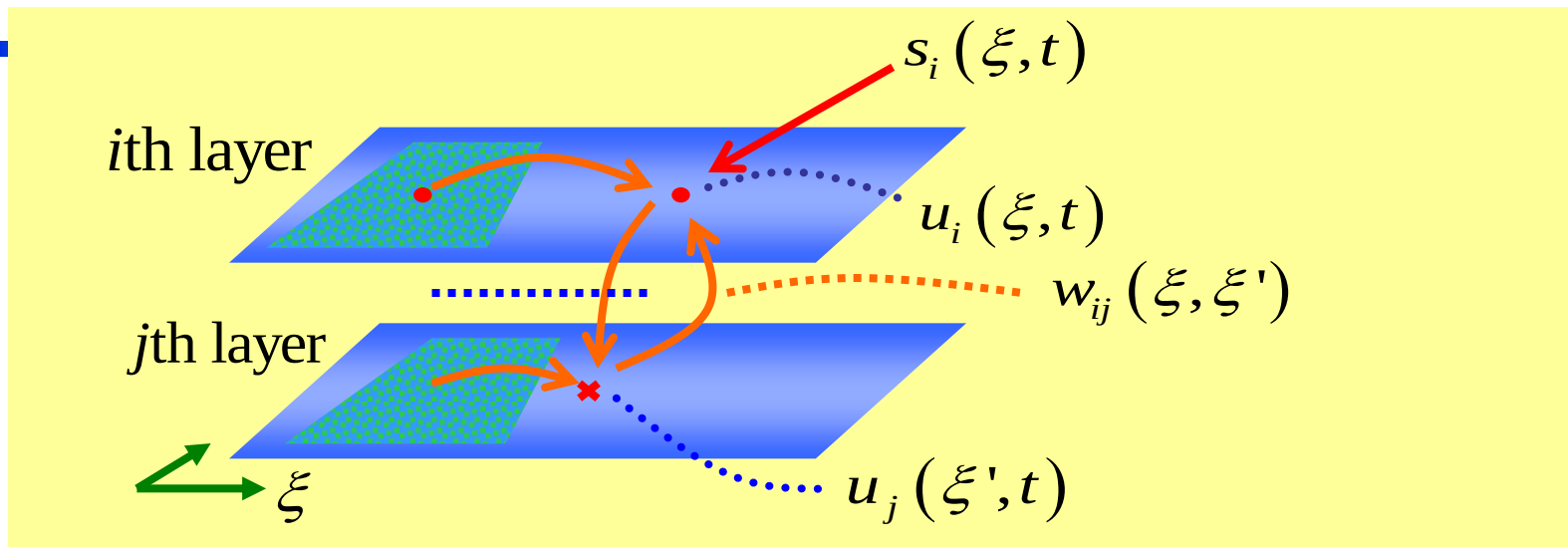
经典流形学习方法一览

方法简称	所保持的几何属性	全局/局部关系	计算复杂度
ISOMAP	点对测地距离	全局	非常高
LLE	局部线性重构关系	局部	低
LE	局部邻域相似度	局部	低
HLLE	局部等距性	局部	高
LTSA	局部坐标表示	全局+局部	低
MVU	局部距离	全局+局部	非常高
Logmap	测地距离与方向	局部	非常低
Diffusion Maps	diffusion距离	全局	中等

经典方法分类结构图



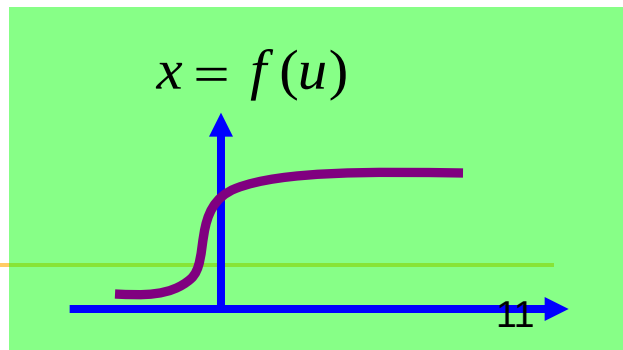
Dynamics of Neural Field



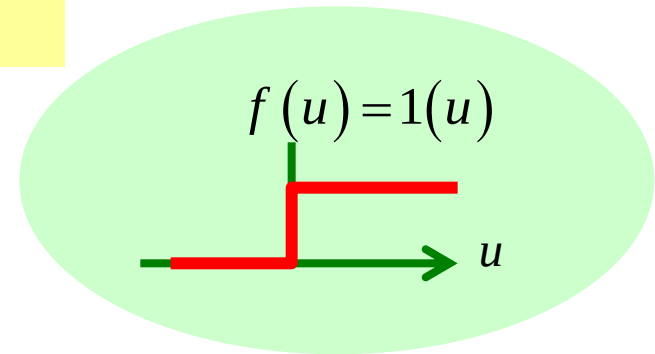
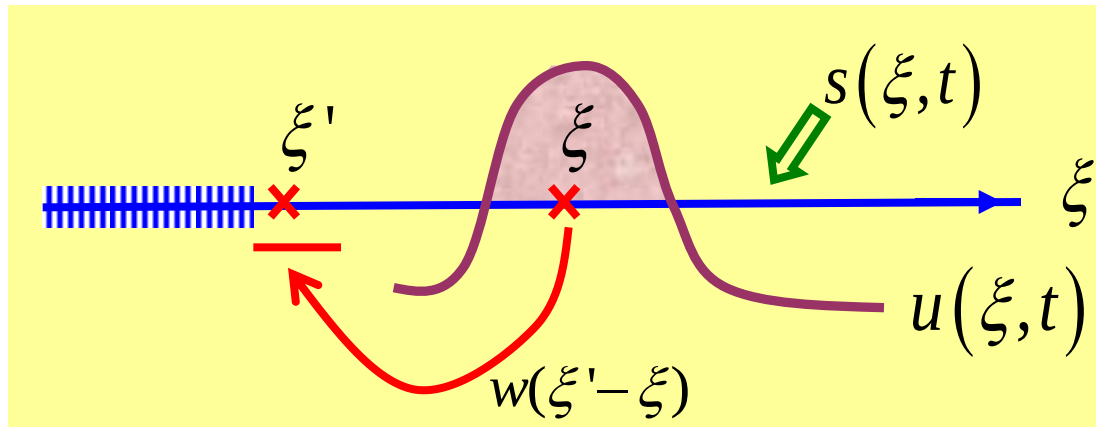
$$\tau \frac{\partial u_i(\xi, t)}{\partial t} = -u_i(\xi, t) + \sum_j \int w_{ij}(\xi, \xi') f[u_j(\xi', t)] d\xi' + s_i(\xi, t) - h$$

$$\underbrace{\quad}_{\parallel} x_j(\xi', t)$$

Wilson-Cowan
Amari
Ermentrout-Cowan



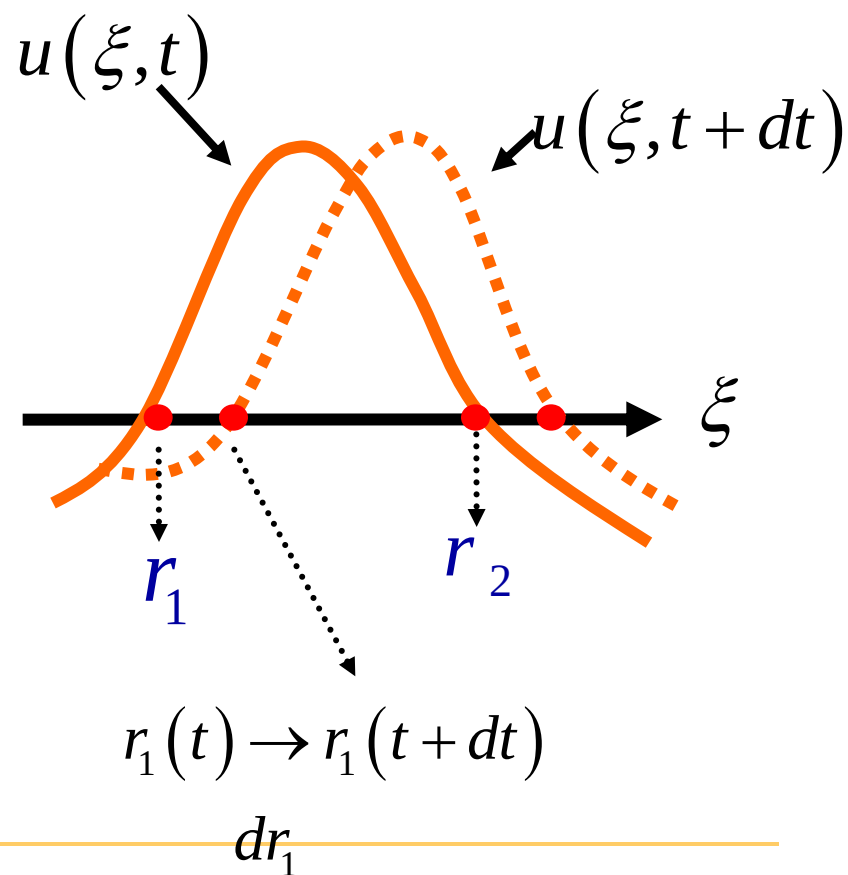
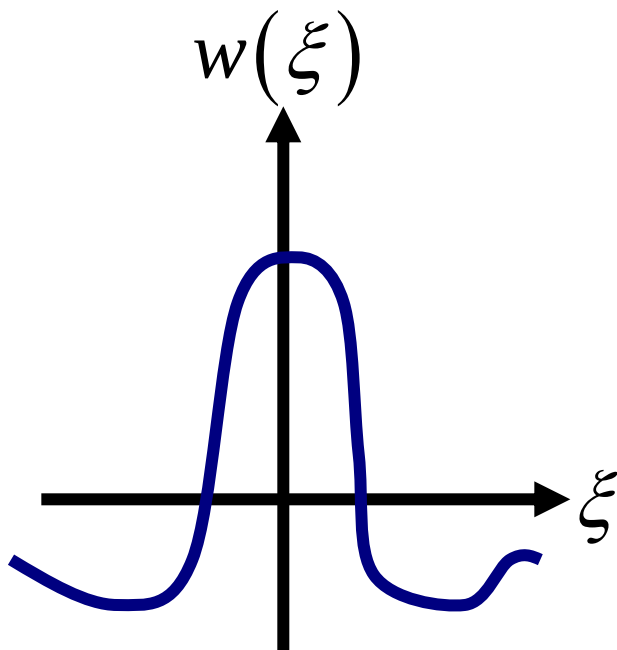
one-dimension; one layer



$$\tau \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} = -u + \int w(\xi - \xi') f[u(\xi', t)] d\xi + s(\xi, t)$$

引自 Shun-ichi Amari: **Dynamics of Excitation and Self-Organization in Neural Fields**

Boundary of Excitation



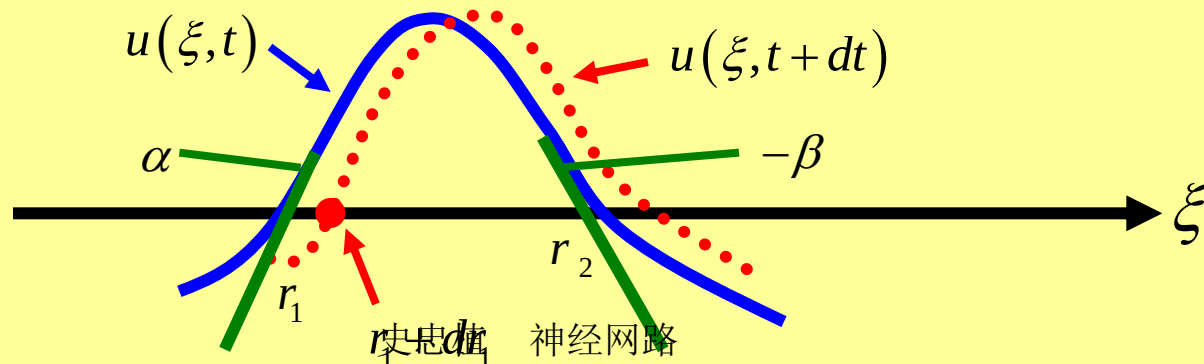
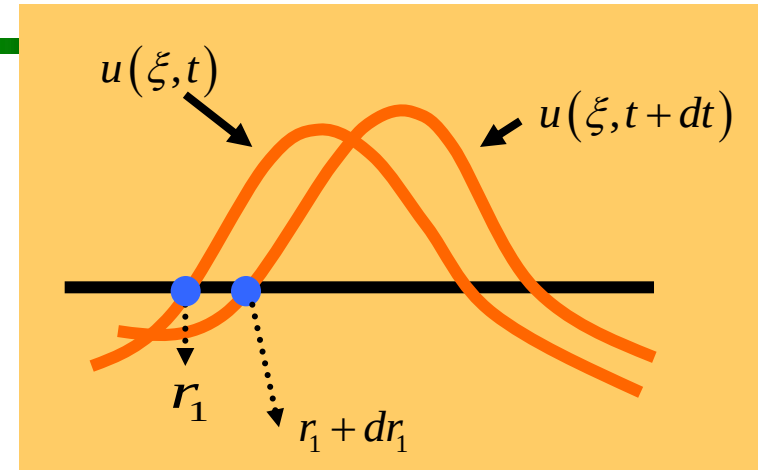
Dynamics of Boundary

$$u(r_1, t) = 0$$

$$u(r_1 + dr_1, t + dt) = 0$$

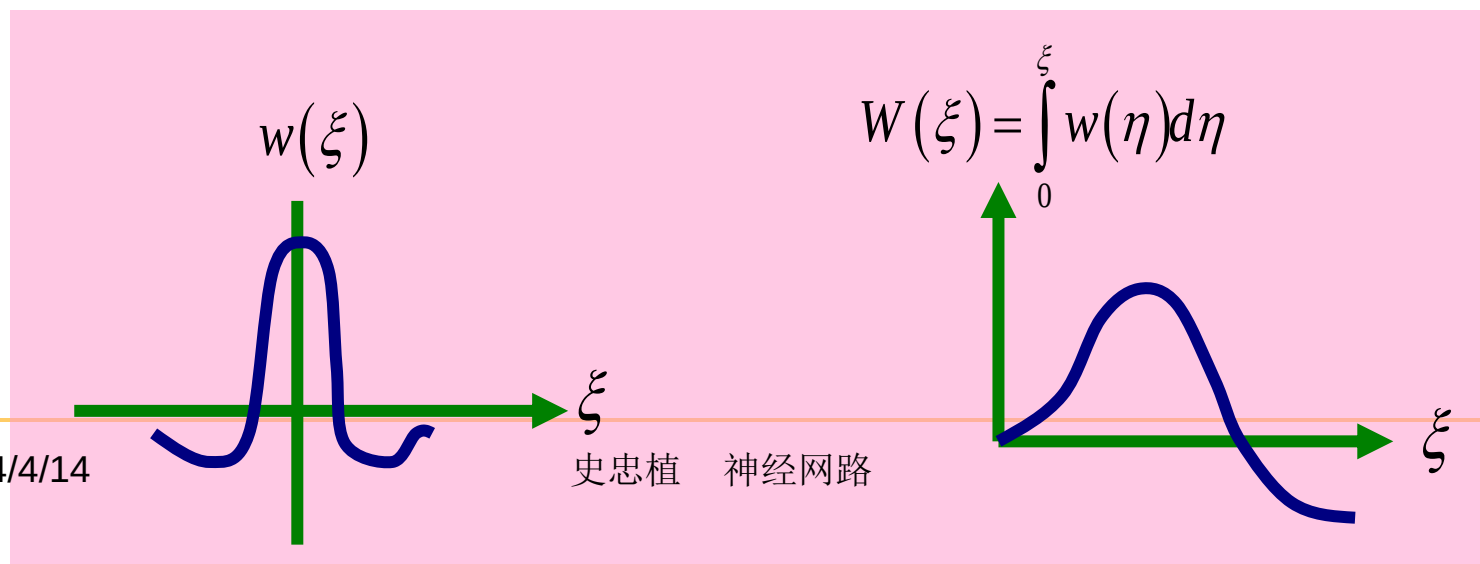
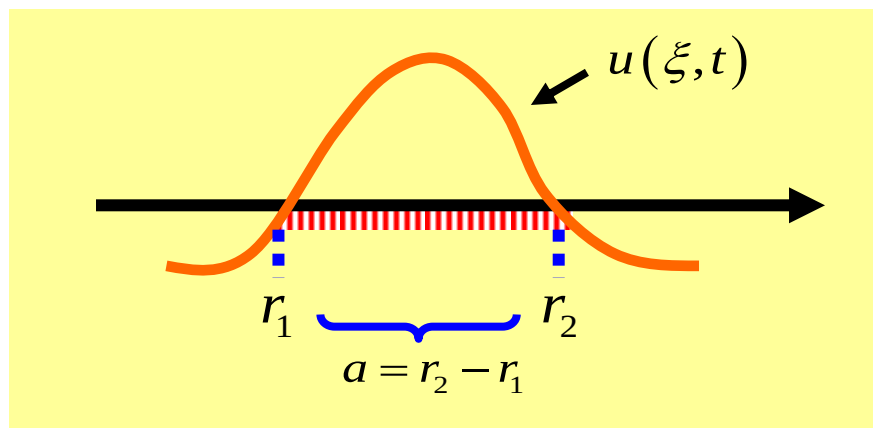
$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial \xi}}_{\alpha} dr_1 + \frac{\partial u}{\partial t} dt = 0$$

$$\tau \frac{dr_1}{dt} = -\frac{1}{\alpha} \left[-u(r_1, t) + \int_{r_1}^{r_2} w(r_1 - \xi') d\xi' + s \right]$$



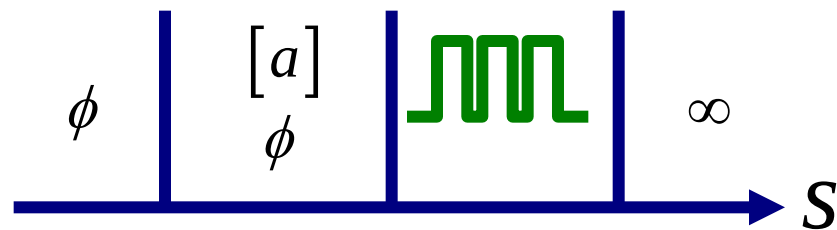
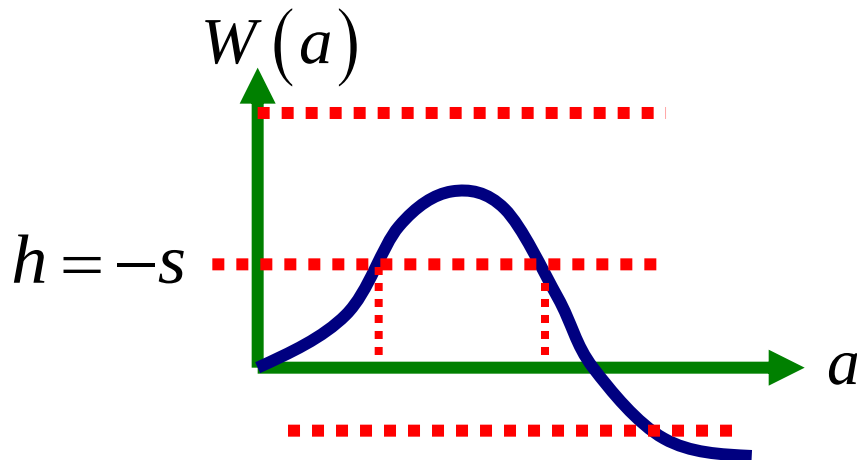
$$\tau \frac{dr_1}{dt} = -\frac{1}{\alpha} \{W(r_2 - r_1) + s\}$$

$$\tau \frac{dr_2}{dt} = \frac{1}{\beta} \{W(r_2 - r_1) + s\}$$

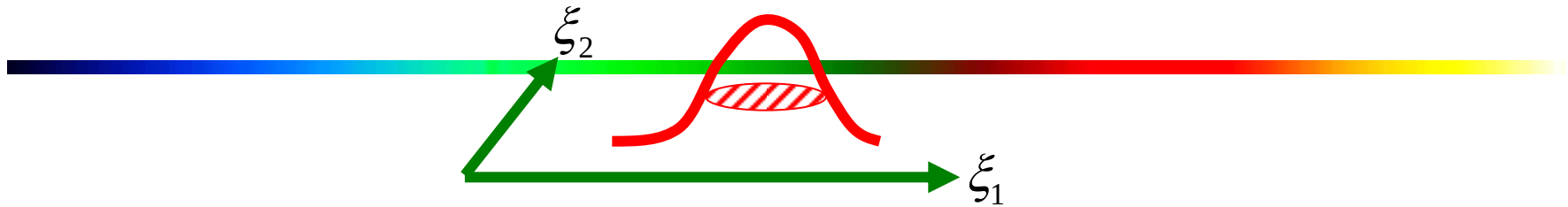


$$\tau \frac{\partial a}{\partial t} = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) [W(a) + s]$$

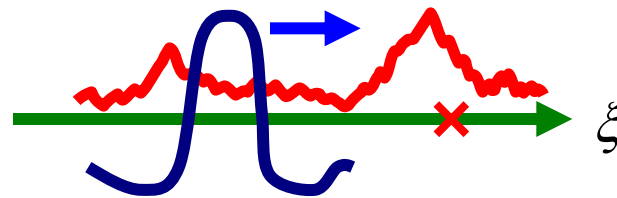
$$W(a) = \int_0^a w(a)$$



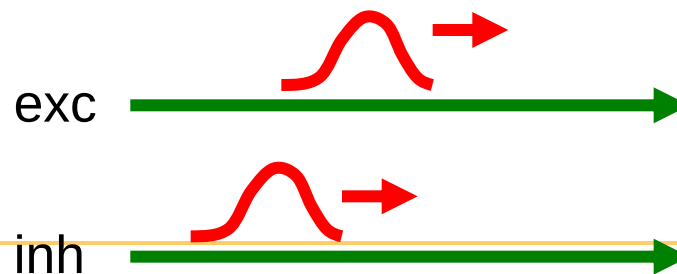
multi-dimension



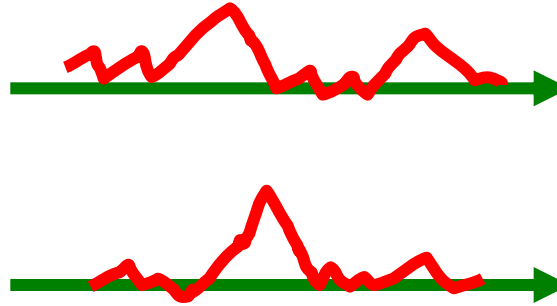
maximum detector



travelling waves

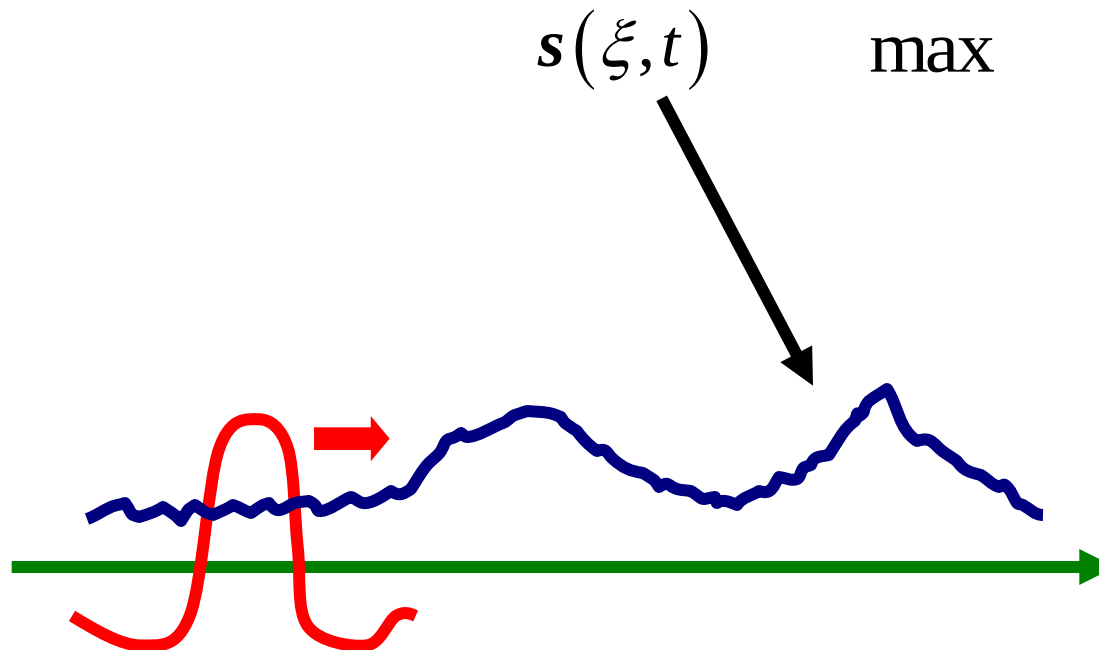


oscillation and chaos



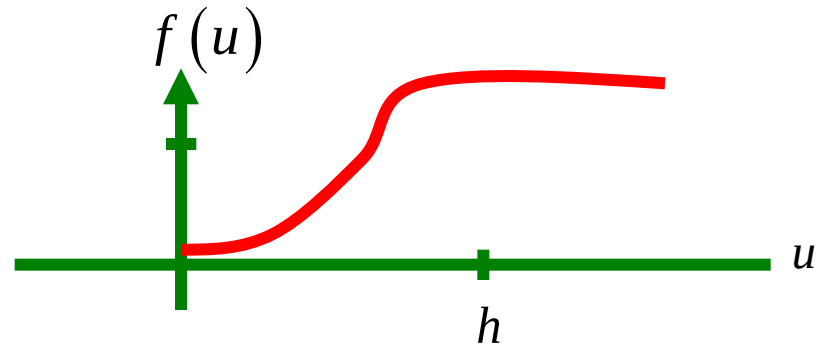
general activation function
 $f(u)$

Input from outside *search for maximum*



general activation function

$$x(\xi) = f[u(\xi)]$$



{ existence of bump solution
stability

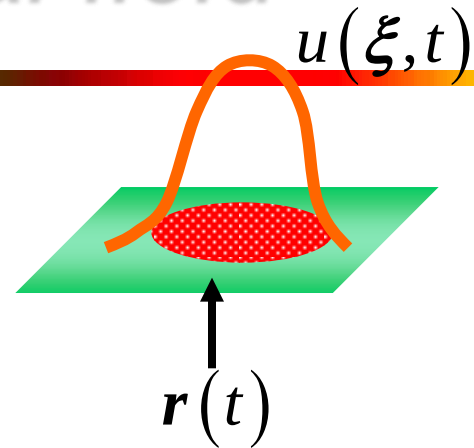
$$\longleftrightarrow \begin{aligned} f_0(u) &= 1[u] \\ f_h(u) &= 1[u - h] \end{aligned}$$

Wiener-Krasnosel'skii theory

2-dimensional field

1. symmetry

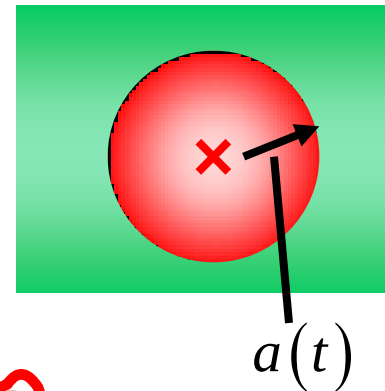
$$\tau \frac{da(t)}{dt} = c [\tilde{W}(a) - h]$$



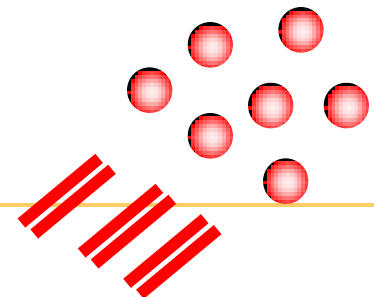
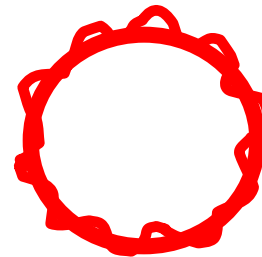
2. stability

$$\tau \frac{dr}{dt} = \begin{matrix} \ddots \\ \ddots \\ \ddots \end{matrix} \tilde{W}(a)$$

curvature



$$\frac{dr}{dt} = \dots$$

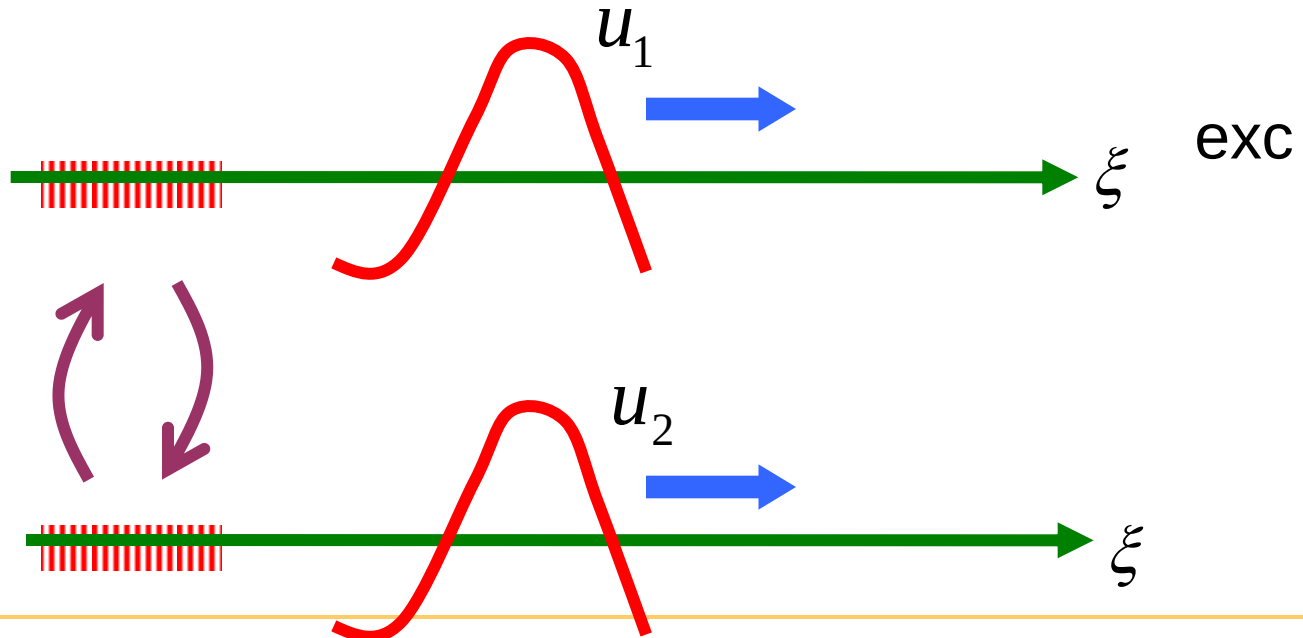


stripes
chaos

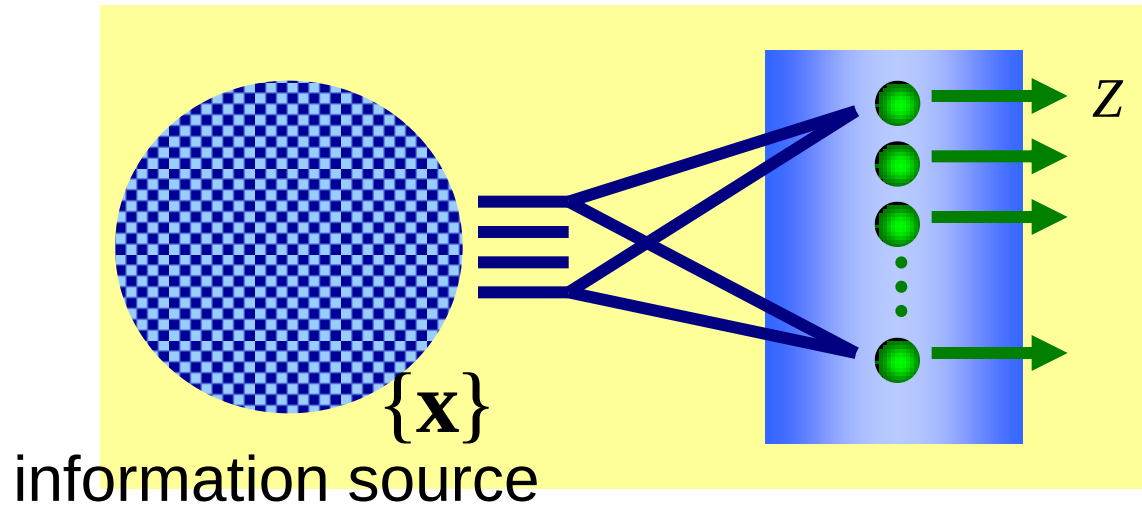
Oscillation Travelling wave

$$\tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -u_1 + \sum \int w_{1i} (\xi - \xi') f[u_i(\xi', t)] d\xi' + s_1$$

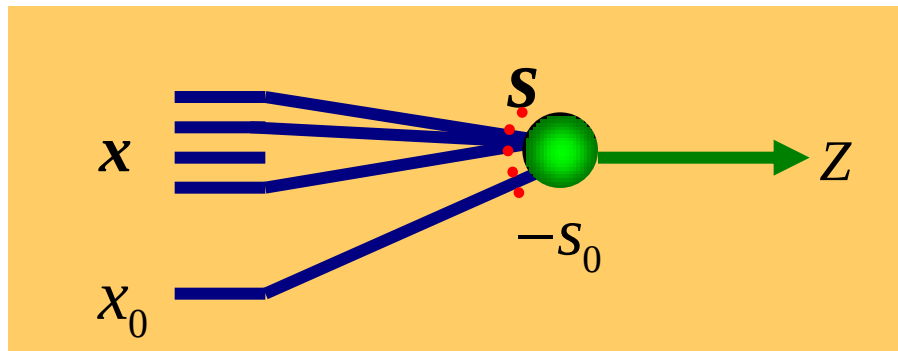
$$\tau_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = -u_2 + \sum \int w_{2i} (\xi - \xi') f[u_i(\xi', t)] d\xi' + s_2$$



Learning and Self-Organization



$$z = f(\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} - s_0 x_0)$$

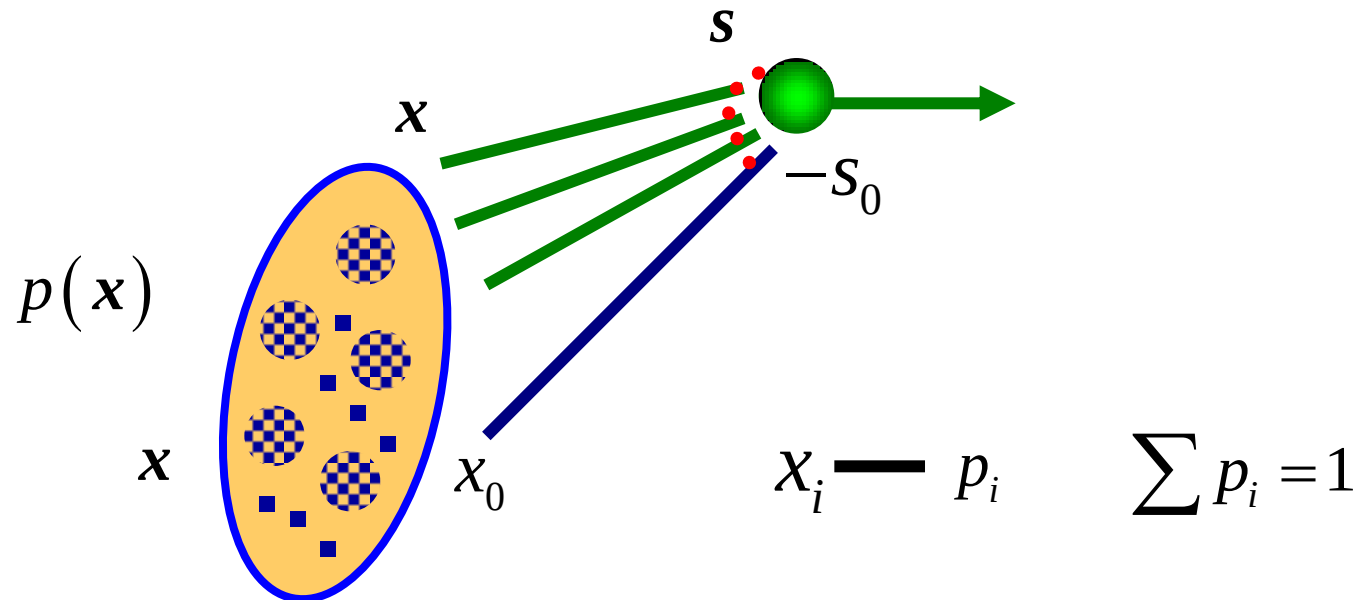


$$\begin{aligned} \mathbf{s} \cdot \mathbf{x} &= \sum s_i x_i \\ &= s_1 x_1 + \cdots + s_n x_n \end{aligned}$$

generalized Hebbian learning

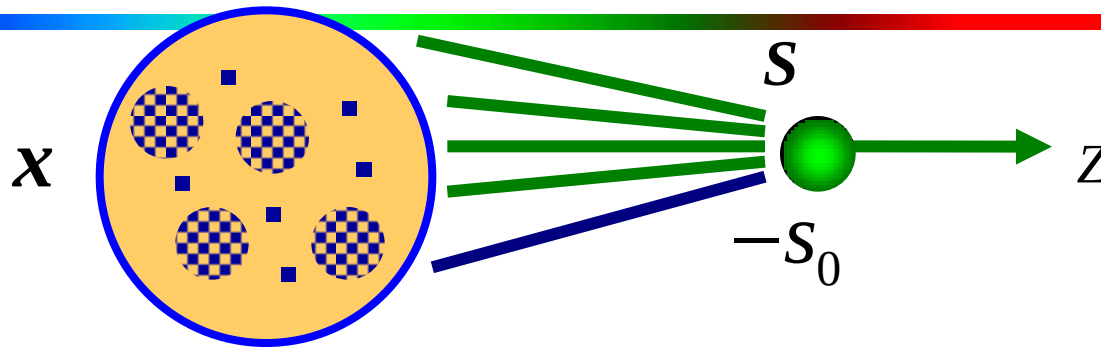
$$\tau \dot{\mathbf{s}}(t) = -\mathbf{s} + cf(\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} - s_0 x_0) \mathbf{x}$$

$$\tau \dot{s}_0(t) = -s_0 + c' f(\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} - s_0 x_0) x_0$$



information source

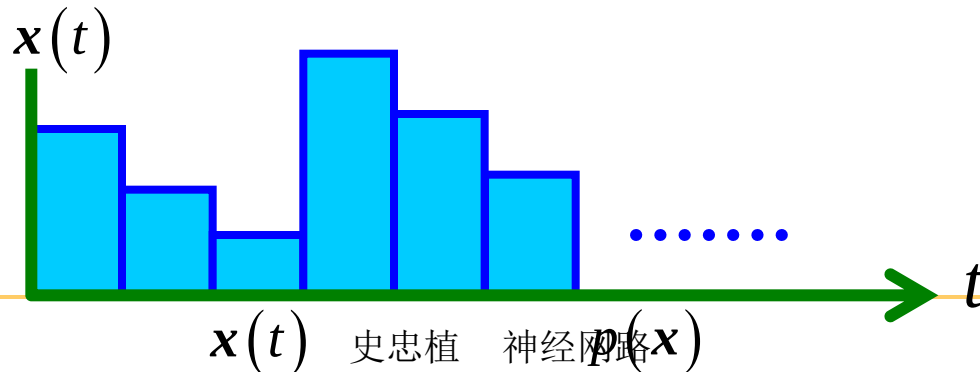
averaged learning equation



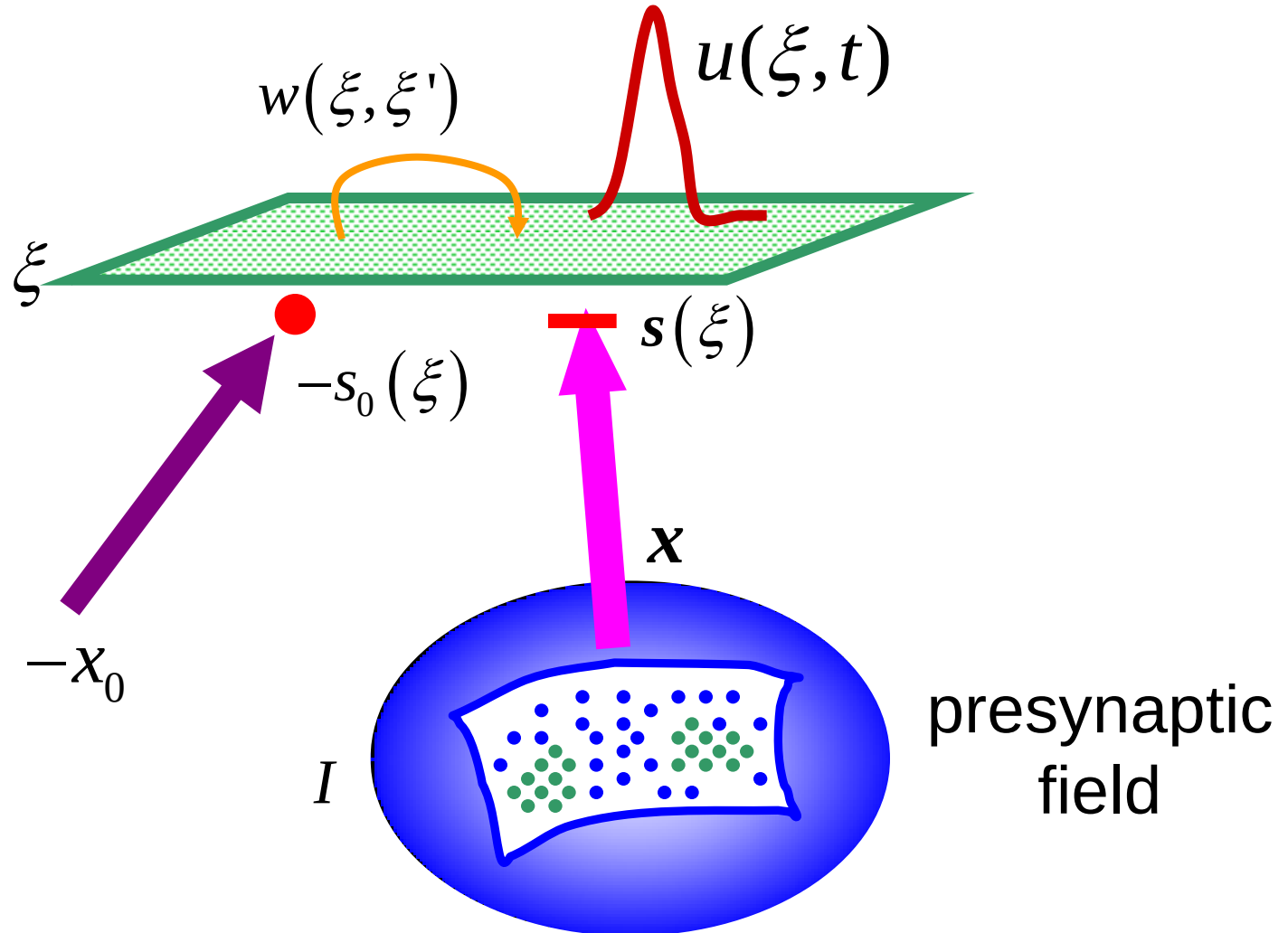
$$\tau \dot{\mathbf{s}}(t) = -\mathbf{s} + c \langle f(\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} - s_0 x_0) \mathbf{x} \rangle$$

$$\tau \dot{s}_0(t) = -s_0 + c' \langle f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - s_0 x_0) x_0 \rangle$$

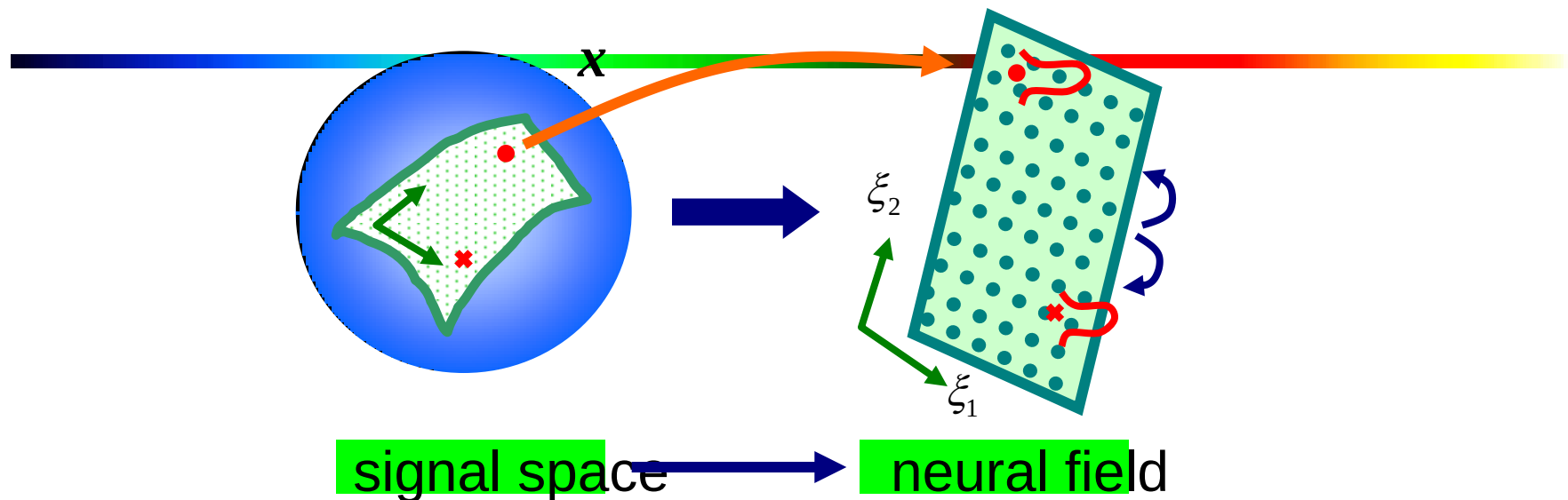
$$\langle a(\mathbf{x}) \rangle = \int p(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum p_i a(\mathbf{x}_i)$$



Dynamics of Self-Organizing Neurofield



Self-organization of topological map



- amplification
- topology
- patch structure (columnar structure)
- ... dynamical

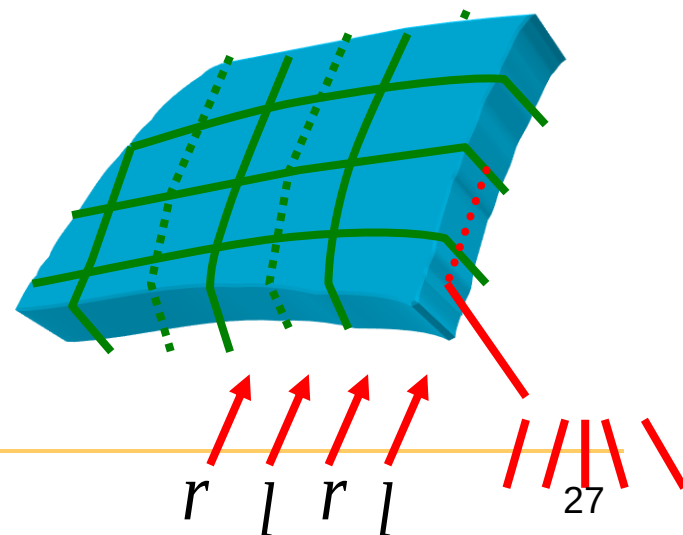
Willshaw-Malsburg stability

Takeuchi-Amari

Kohonen

2014/4/14 •••••

史忠植 神经网络



dynamics of neural excitation

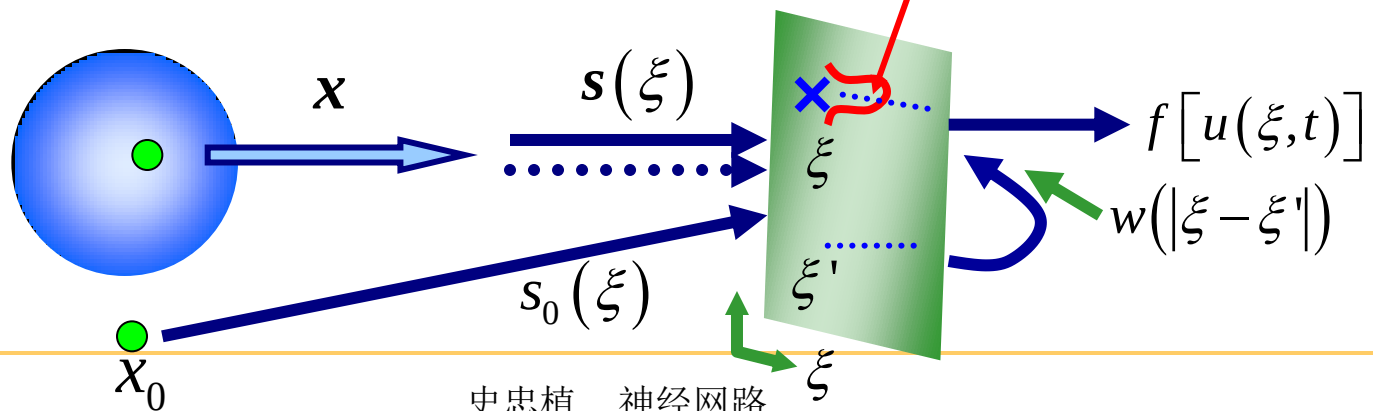
$$\tau \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} = -u(\xi, t) + S(\xi, \mathbf{x}, t) + \int w(\xi - \xi') f[u(\xi', t)] d\xi'$$

$$S(\xi, \mathbf{x}, t) = \mathbf{s}(\xi, t) \cdot \mathbf{x} - s_0(\xi, t) x_0$$

$$W \circ f[U] = \int w(\xi - \xi') f[U(\xi')] d\xi$$

$\xrightarrow{\quad}$
 $U(\xi, \mathbf{x}; t)$: equilibrium

$$U(\xi, \mathbf{x}) = S(\xi, \mathbf{x}) + W \circ f[U(\xi, \mathbf{x})]$$



dynamics of learning

$$\tau' \frac{\partial s(\xi, t)}{\partial t} = -s(\xi, t) + cf[u(\xi, t)]x,$$

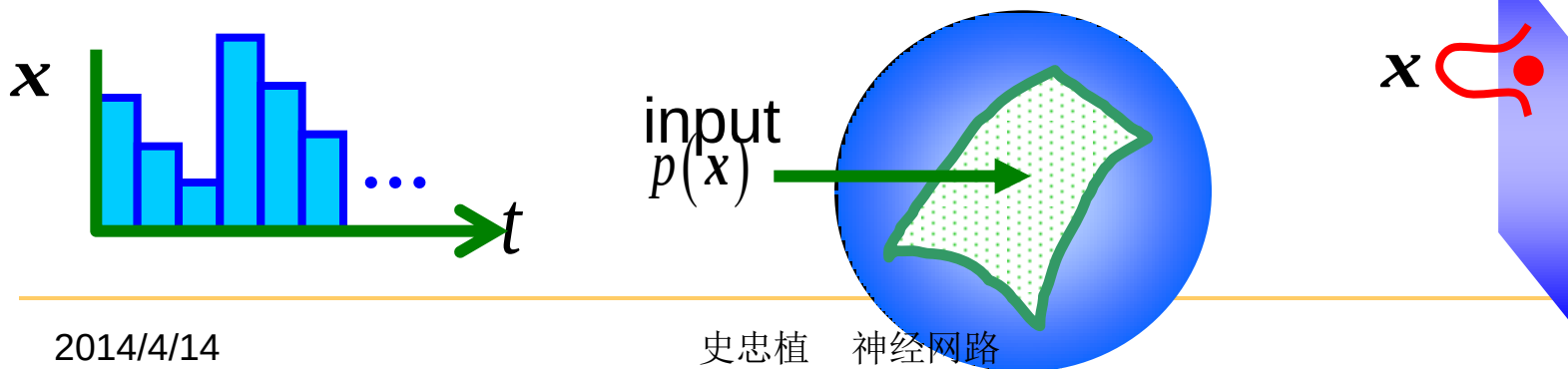
$$\tau' \frac{\partial s_0(\xi, t)}{\partial t} = -s_0(\xi, t) + c' f[u(\xi, t)]x_0,$$

adiabatic hypothesis $U(\xi, x) \leftarrow u(\xi, t)$

average learning equation

$$\tau' \frac{\partial s(\xi, t)}{\partial t} = -s + c \langle f[U(\xi, x')] x' \rangle$$

$$\langle a(x') \rangle = \int p(x') a(x') dx' \quad \tau' \frac{\partial s_0}{\partial t} = -s_0 + c' \langle f(u) \rangle x.$$



$$\tau' \frac{\partial}{\partial t} S(\xi, \mathbf{x}) = -S + k * f[U]$$

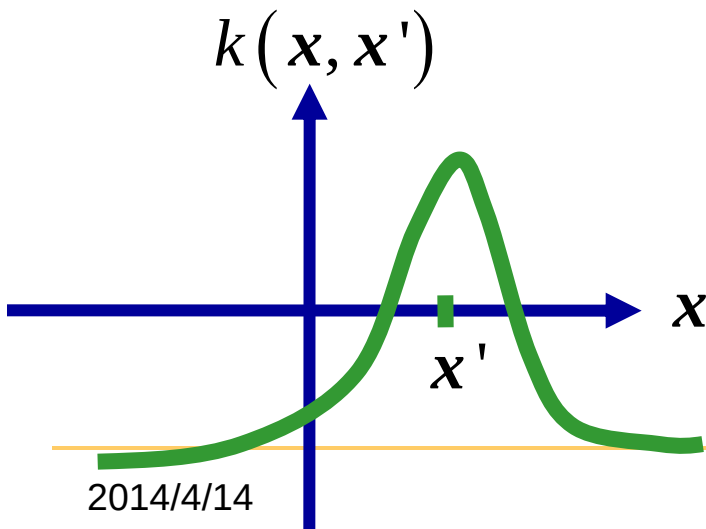
$$S(\xi, \mathbf{x}) = \mathbf{s}(\xi) \cdot \mathbf{x} - s_0(\xi) x_0$$

$$\tau' \dot{\mathbf{s}}(\xi) = -\mathbf{s}(\xi) + c \langle f[U(\xi, \mathbf{x}') \mathbf{x}'] \rangle$$

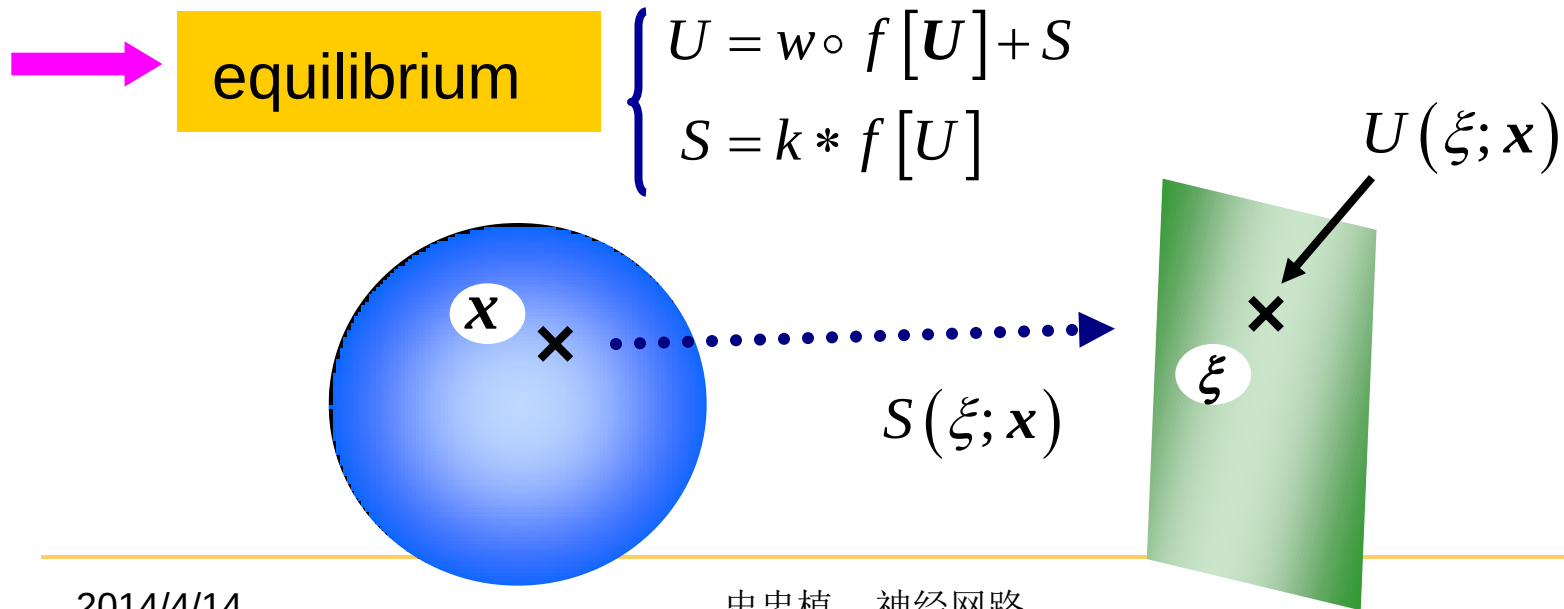
$$\tau' \dot{\mathbf{s}}(\xi) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} + c \int f[U](\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}) p(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

$$k * f[U] = \int f[U(\xi, \mathbf{x}')] k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') p(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = c\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' - c' x_0^2$$



$$\left\{ \begin{array}{l} U(\xi \cdot \mathbf{x}) = w \circ f[U] + S(\xi, \mathbf{x}) \\ \tau \frac{\partial S(\xi, \mathbf{x}, t)}{\partial t} = -S + k * f[U] \quad k * f[U] = \int f[U(\xi, \mathbf{x}')] k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') p(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ \tau \frac{\partial U(\xi; \mathbf{x})}{\partial t} = -U + w \circ f(U) + S \quad W \circ f[U] = \int w(\xi - \xi') f[U(\xi')] d\xi \end{array} \right.$$



神经场理论模型

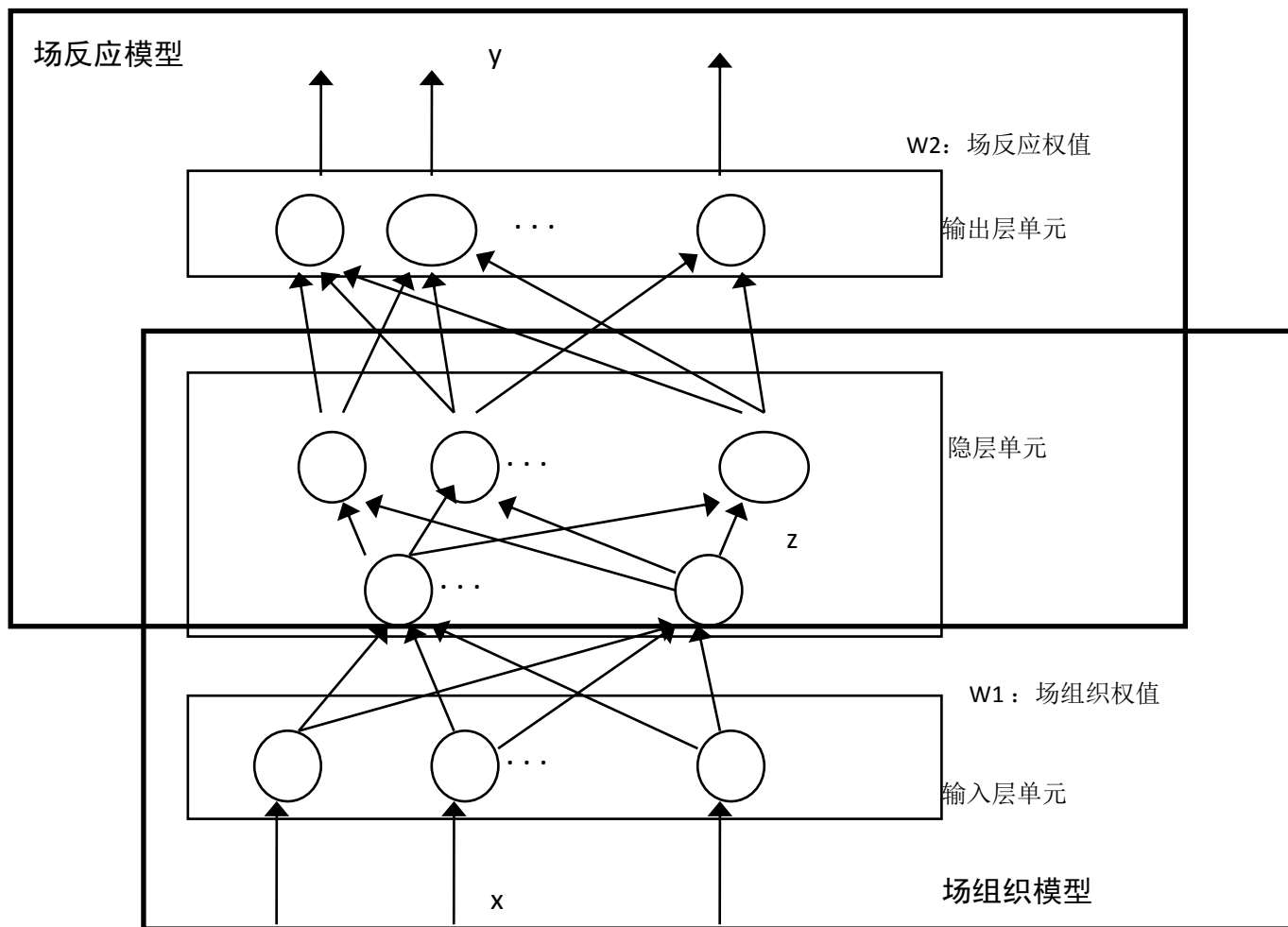


神经场理论是从整体结构分析来理解神经网络的变化机理、动力学行为, 以及信息处理能力与限制, 研究所有神经网络组成非线性空间的整体不变性质, 在更一般信息处理系统中的组织结构、定位机理和嵌入问题, 探索神经网络的理论。

神经场表示

神经网络包括输入单元、隐单元和输出单元。由于有隐单元存在, 隐单元被看作为不可观测量, 在信息处理是需要被估计的值。我们把神经网络的信息处理理解为非完整数据下的信息处理。我们对神经网络的变换机理给出一种新的形式化描述。神经网络变换机理包括两个过程: 神经场组织过程, 通过隐单元实现从输入模式的表示; 神经场反应过程, 实现从表示到输出的变换。这里, X 是输入空间, $X \times Z$ 是表示空间, 或称作为神经场表示空间, Y 是输出空间。

神经场表示



神经场表示

场组织变换模型表示为一个变换 $T: X \rightarrow X \times Z$, 其中, Z 是不可观测量空间, 或是辅助信息量空间, 场组织模型实现输入模式的特征表示, 它可能由算法或是映射而实现; 它的目的是抽取输入模式的特征结构, 使期望的输出模式更容易; 在神经网络中, 由场组织模型所包含的连接权值, 称为场组织权值或认知权值。在场组织模型权值为 W_1 的情形下, 场组织模型表示为

$$q_z(x) = z(x; W_1)$$

神经场表示

场反应模型表示一个变换 $g: X \times Z \rightarrow Y$, 表示从表示空间到输出空间的变换, 即通过对输入模式特征的估计后, 由特征模式表示下的输出。由场反应模型所包含的神经网络连接权值, 我们称之为场反应权值或产生权值。在场反应权值为 W_2 的情形下, 场反应模型表示为

$$p(y) = \sum_z p(z) p(y | z; W_2)$$

基于拓扑结构逼近的学习理论

在神经场理论的框架下基于拓扑结构逼近的学习算法理论,基本的思想可表示为人的感知系统模型,用隐变量来估计和发现输入模式的主要结构,形成输入模式相关的问题结构表示,通过这个结构表示来指出相关的结构估计,表示空间的结构是一个中间结构,它有助于得到期望的结果。这一部分,我们发展了基于代数拓扑概念的结构表示,用拓扑结构表示作为人工神经网络结构抽取表示的中间过程,对于未知系统的逼近密切关系着表示空间中的中间过程表示。

Thank You

Question!

Intelligence Science

<http://www.intsci.ac.cn/>

